

BUTLLETÍ DE LA SOCIETAT CATALANA DE MATEMÀTIQUES
Vol. 14, núm. 1, 1999. Pàg. 99-115

Estructures geomètriques sobre varietats de dimensió tres*

JOAN PORTI

1 El problema de classificació de les varietats de dimensió 3

En aquesta conferència ens proposem mostrar el paper que juguen les estructures geomètriques en el problema de classificació de les varietats de dimensió tres.

Comencem recordant la noció de varietat. Una *varietat* de dimensió n és un espai topològic localment homeomorf a \mathbb{R}^n , Hausdorff i paracompacte. Intuïtivament, podem pensar que una varietat s'obté enganxant boles obertes de \mathbb{R}^n . Per exemple, en dimensió 1, el cercle $S^1 = \{(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2 \mid x_0^2 + x_1^2 = 1\}$ s'obté unint dos intervals, tal com ho mostra la figura 1.

En dimensió dos, l'esfera $S^2 = \{(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 \mid x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ és el resultat d'unir dos discs (figura 2). El tor T^2 s'obté unint quatre discs (vegeu la figura 3).

En general l'esfera de dimensió n

$$S^n = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$$

s'obté enganxant dues boles de dimensió n .

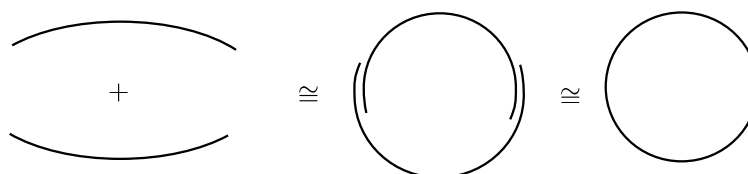
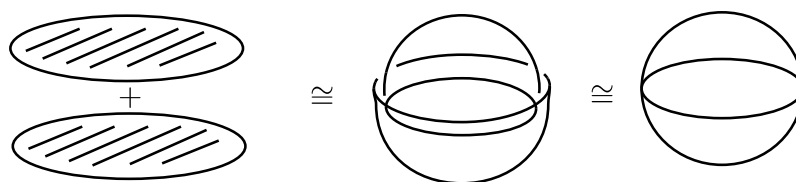
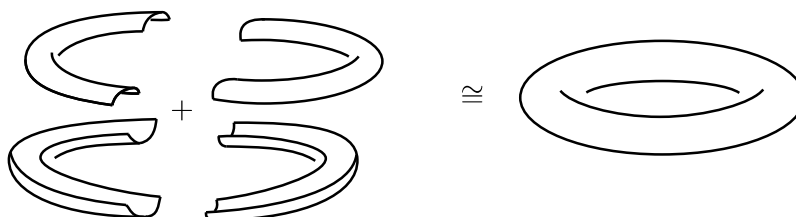


FIGURA 1: El cercle S^1 com a unió de dos intervals.

També podem considerar varietats amb vora si enganxem mitges boles

$$B_+^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 < 1, x_1 \geq 0\}$$

* Conferència pronunciada a la Primera Trobada Matemàtica de la Societat Catalana de Matemàtiques, març 1998.

FIGURA 2: L'esfera S^2 com a unió de dos discs.FIGURA 3: El tor T^2 com a unió de quatre discs.

de manera compatible. És a dir, la vora correspon a $x_1 = 0$ i cal que es preservi quan enganxem les mitges boles.

El problema que ens interessa és el següent:

PROBLEMA Classificar les varietats compactes, connexes, orientables i sense vora (llevat homeomorfismes).

Recordem que un *homeomorfisme* és una aplicació $h : M \rightarrow N$ contínua, bijectiva i amb inversa contínua. Podem pensar un homeomorfisme com una deformació contínua. A la figura 4 hi ha exemples de varietats homeomorfes.

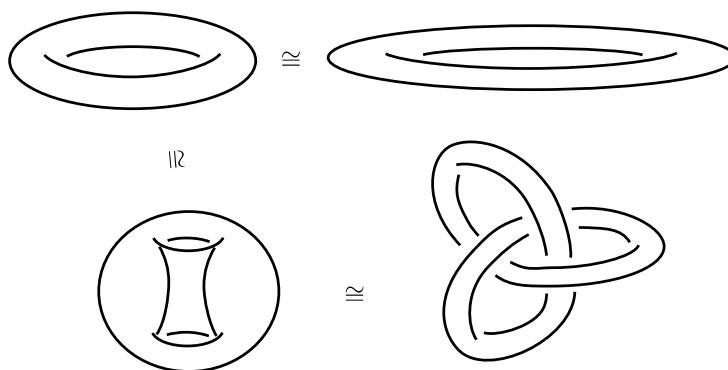


FIGURA 4: Exemples de superfícies homeomorfes.

Les altres nocions que intervenen en el problema són la de compacitat i la d'orientabilitat. Podem interpretar la propietat de compacitat com una noció de finitud sense la qual el problema pot ser molt més complex. En canvi, l'orientabilitat no es considera cap restricció essencial.

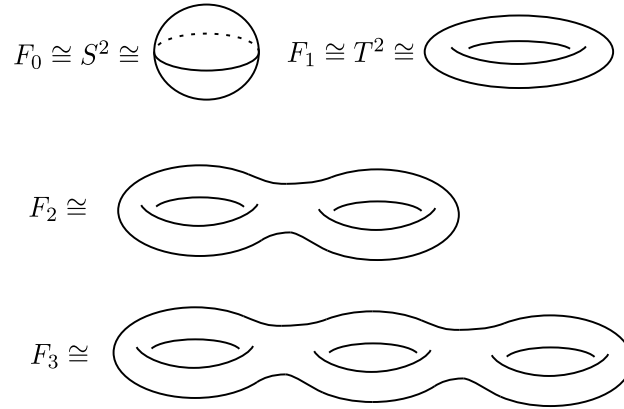


FIGURA 5: Superfícies tancades i orientables de gèneres 0, 1, 2 i 3 (F_g denota la superfície de gènere g).

Per aproximar-nos al problema de classificació cal distingir dimensions. Per exemple, en dimensió 1 l'única varietat compacta i sense vora és el cercle S^1 . Les varietats de dimensió dos (superfícies) compactes se saben classificar des de principis de segle. Més concretament, les superfícies compactes, orientables i sense vora estan classificades pel gènere (vegeu la figura 5).

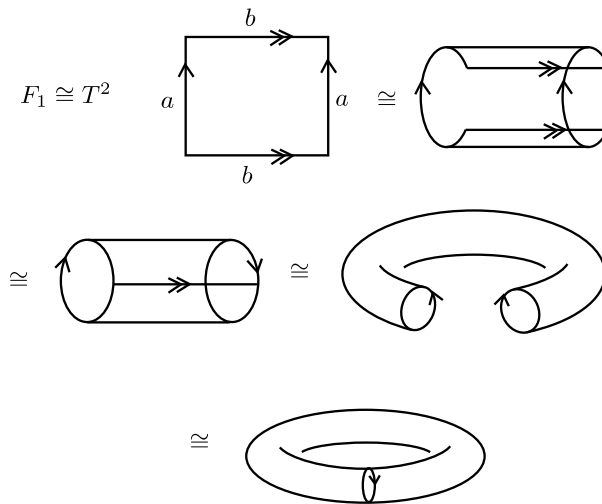


FIGURA 6: El tor T^2 com a resultat d'identificar les arestes d'un quadrat.

Les varietats compactes de dimensió quatre o superior no es poden classificar. Això és degut al fet que tota presentació finita d'un grup es pot realitzar com a grup fonamental d'una varietat de dimensió n , per a tot $n \geq 4$, i no es pot construir cap algorisme que decideixi a partir de la presentació si dos grups són isomorfs o no.

Així doncs, la dimensió tres és l'única per a la qual el problema de classificació està obert i pot tenir solució. Esperem que les estructures geomètriques ens ajudin a classificar les varietats de dimensió tres.

2 Exemples d'estructures en superfícies

Abans de donar exemples en dimensió tres, volem començar donant exemples d'estructures geomètriques sobre superfícies (varietats de dimensió dos).

Comencem pel tor T^2 , que interpretem com un quadrat amb els costats identificats (figura 6). Alternativament, podem pensar T^2 com el quocient del pla \mathbb{R}^2 per l'acció de \mathbb{Z}^2 generada per

$$\begin{cases} (x, y) \mapsto (x + 1, y) \\ (x, y) \mapsto (x, y + 1) \end{cases}$$

(vegeu la figura 7). Observem que l'acció de \mathbb{Z}^2 preserva la mètrica estàndard de \mathbb{R}^2 i per tant $T^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$ té una estructura o mètrica euclidiana. Això vol dir que T^2 admet una mètrica localment isomètrica al pla \mathbb{R}^2 , que és equivalent a tenir curvatura seccional constant igual a zero.

El següent exemple és la superfície de gènere dos F_2 , que construïm identificant les arestes d'un octàgon (vegeu la figura 8).

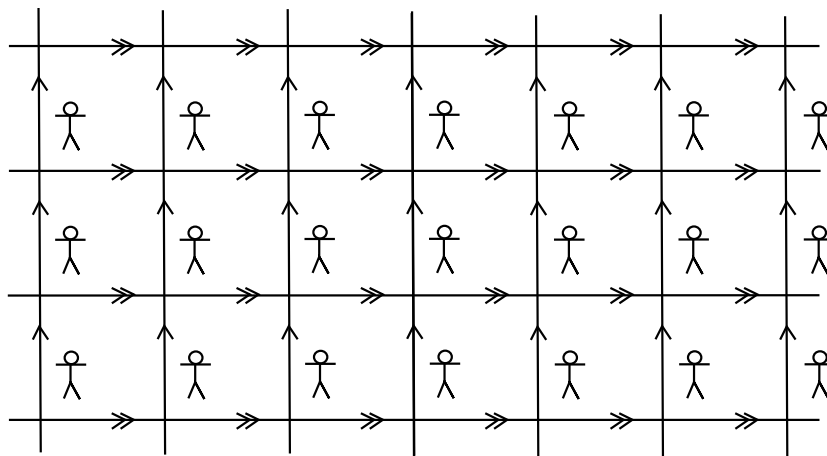


FIGURA 7: Interpretació del tor com a quocient de \mathbb{R}^2 per l'acció de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Si un ninot bidimensional visqués en el tor T^2 , aleshores veuria el mateix que si visqués en el pla \mathbb{R}^2 i hi hagués una infinitat de còpies d'ell mateix distribuïdes tal com indica el dibuix.

Observem però que no podem fer la mateixa construcció mètrica en el pla \mathbb{R}^2 que hem fet abans pel tor. En el cas del tor, els quatre vèrtexs del quadrat s'identifiquen en un sol punt, la qual cosa és compatible amb el fet que l'angle del quadrat euclidià és $2\pi/4 = \pi/2$. En canvi, per a la superfície F_2 de gènere dos, els vuit vèrtexs de l'octàgon s'identifiquen en un sol punt, però l'angle de l'octàgon regular euclidià és diferent de $2\pi/8 = \pi/4$. Per trobar un octàgon regular amb aquest angle, canviem de geometria i passem del pla euclidià al pla hiperbòlic.

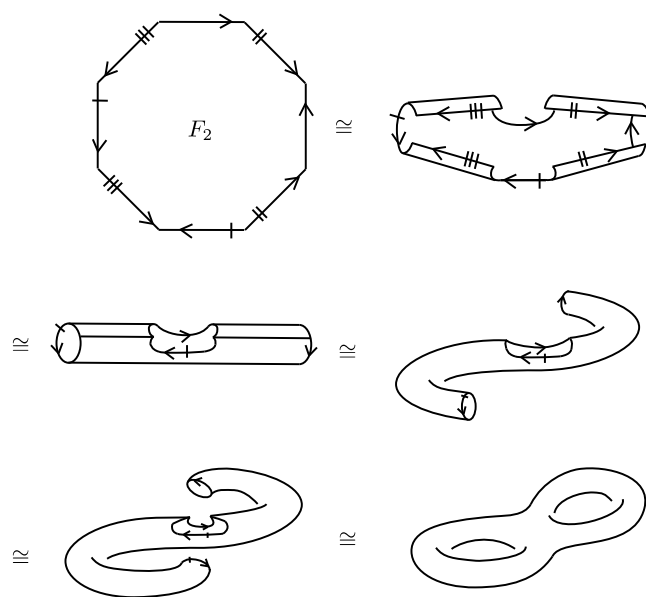


FIGURA 8: La superfície de gènere dos s'obté identificant les arestes d'un octàgon.

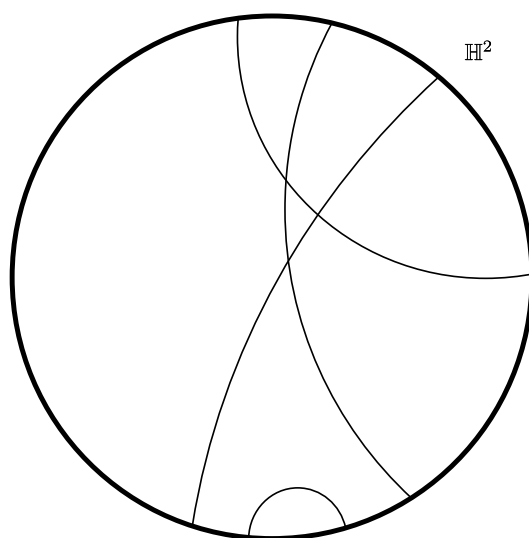
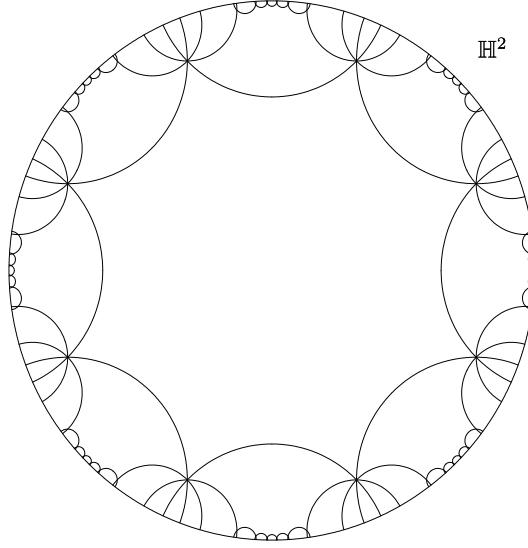


FIGURA 9: Exemples de geodèsiques del pla hiperbòlic \mathbb{H}^2 . El model del disc és un model conforme, perquè representa correctament els angles, però no representa correctament les distàncies. Per exemple, les geodèsiques del dibuix tenen longitud infinita.

FIGURA 10: Tessel·lació de \mathbb{H}^2 en octàgons regulars d'angle $\pi/4$.

Recordem ràpidament que es pot construir el pla hiperbòlic com el disc unitat

$$\mathbb{H}^2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\}$$

amb la mètrica

$$ds^2 = \frac{4(dx_1^2 + dx_2^2)}{(1 - x_1^2 - x_2^2)^2}.$$

La figura 9 intenta il·lustrar la geometria del pla hiperbòlic.

Si abans hem obtingut el tor T^2 a partir d'una tessel·lació del pla euclidià \mathbb{R}^2 en quadrats regulars, ara obtenim la superfície de gènere dos F_2 a partir d'una tessel·lació del pla hiperbòlic en octàgons regulars d'angle $2\pi/8$. Vegeu la figura 10.

Per tant, escrivim

$$F_2 = \mathbb{H}^2/\Gamma,$$

on $\Gamma < \text{Isom}(\mathbb{H}^2)$ és un grup generat per isometries que identifiquen els costats de l'octàgon. En deduïm que F_2 admet una mètrica o estructura hiperbòlica, és a dir una mètrica localment isomètrica al pla hiperbòlic \mathbb{H}^2 , que és equivalent al fet de ser una mètrica de curvatura constant -1 .

La construcció que hem fet per a una superfície de gènere dos F_2 es generalitza per a superfícies F_g de gènere $g \geq 2$. En particular, tota superfície F_g de gènere $g \geq 2$ admet una mètrica hiperbòlica (i.e. de curvatura constant -1).

L'esfera $S^2 = \{(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 \mid x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ es considera com la superfície de gènere zero F_0 i també admet una mètrica de curvatura constant. Més concretament, la mètrica estàndard de \mathbb{R}^3 induïx en S^2 una mètrica de curvatura constant $+1$, que s'anomena *mètrica esfèrica*.

Hem vist que totes les superfícies compactes, orientades i sense vora admeten una mètrica de curvatura constant. La fórmula de Gauss-Bonnet ens diu que el signe

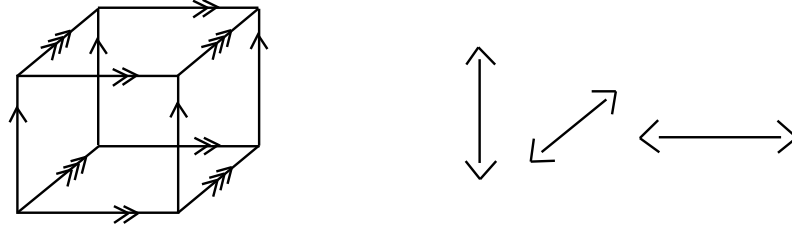


FIGURA 11: El tor tridimensional T^3 s'obté identificant les cares oposades d'un cub. Les fletxes a la dreta de la figura representen les identifications de les cares del cub. Les arestes del cub que s'identifiquen entre elles estan representades amb el mateix símbol.

de la curvatura és un invariant topològic:

$$\int_{F_g} K = 2\pi(2 - 2g),$$

on K es la curvatura i g és el gènere de la superfície. La mètrica de curvatura constant no és necessàriament única (de fet no ho és sempre), però el seu signe sí.

3 Exemples en dimensió tres

Després dels exemples d'estructures geomètriques sobre superfícies, donem exemples de varietats de dimensió tres amb estructures geomètriques.

El primer exemple és el tor T^3 de dimensió 3, que pensarem com una generalització de la superfície T^2 . Abans hem dit que T^2 és el resultat d'identificar els costats d'un quadrat; anàlogament el tor tridimensional T^3 s'obté identificant les cares oposades d'un cub mitjançant translacions, tal com mostra la figura 11.

Seguint l'analogia amb el cas de dimensió dos, el tor T^3 és el quocient de \mathbb{R}^3 per l'acció de \mathbb{Z}^3 generada per

$$\begin{cases} (x, y, z) \mapsto (x + 1, y, z) \\ (x, y, z) \mapsto (x, y + 1, z) \\ (x, y, z) \mapsto (x, y, z + 1) \end{cases}$$

Com que l'acció de \mathbb{Z}^3 preserva la mètrica, deduïm que el tor T^3 admet una mètrica euclidiana, és a dir una mètrica de curvatura constant zero.

Un altre exemple que es generalitza fàcilment de dimensió dos a dimensió tres és el de l'esfera (en realitat es generalitza fàcilment a qualsevol dimensió). Més concretament, l'esfera

$$S^3 = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4 \mid x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

admet una mètrica de curvatura constant +1, és la mètrica induïda per la mètrica euclidiana de \mathbb{R}^4 .

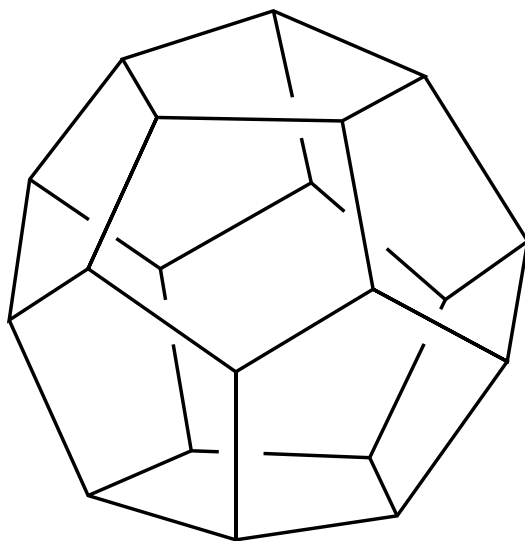
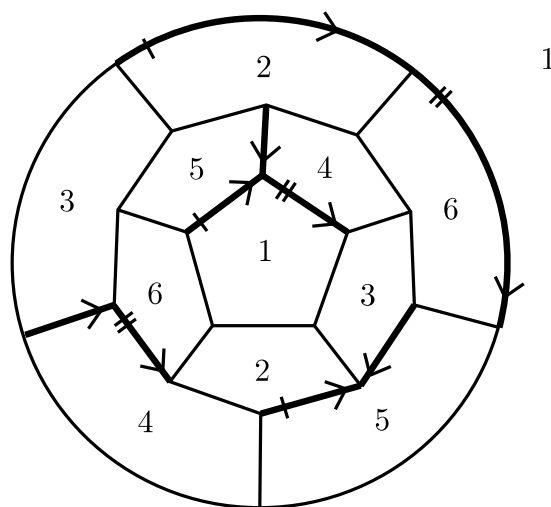
FIGURA 12: Dodecàedre de \mathbb{R}^3 .

FIGURA 13: Aquest esquema representa les dotze cares del dodecàedre, on una de les cares està representada per l'exterior del cercle. Per obtenir la varietat de Poincaré, cal identificar les cares que porten el mateix número, tenint en compte que les identifications han de ser compatibles amb les arestes marcades. En aquest esquema representem tres classes d'equivalència d'arestes (les altres set classes s'obtenen per rotació de l'esquema).

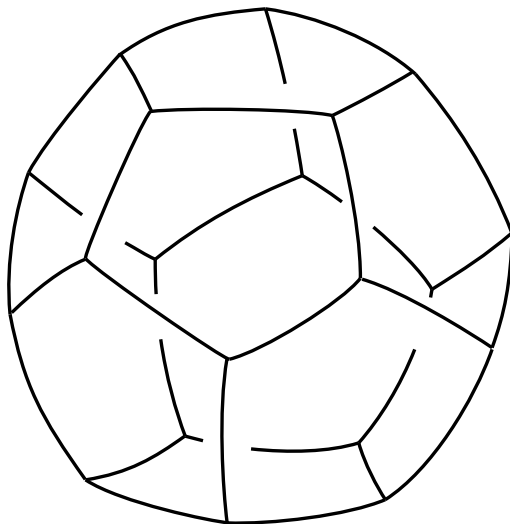


FIGURA 14: Representació conforme d'un dodecàedre esfèric d'angles diedres $2\pi/3$. Podem pensar que inflem el dodecàedre euclidià de la figura 12 per obtenir-lo.

A continuació descrivim dues construccions molt semblants que donen varietats de dimensió tres molt diferents. Són la varietat de Poincaré [15] i la de Seifert-Weber [21], que porten el nom dels seus descobridors.

Comencem amb un dodecàedre regular de \mathbb{R}^3 (figura 12). Si volem identificar les cares oposades d'aquest dodecàedre, no podem fer-ho mitjançant translacions perquè les cares no s'avenen, cal fer-ho mitjançant translacions seguides de rotacions d'angle

$$\frac{\pi}{5} + \frac{2\pi k}{5} \quad (\text{amb } k \in \mathbb{Z}).$$

La varietat de Poincaré és el resultat d'identificar les cares oposades d'un dodecàedre regular mitjançant una translació seguida d'una rotació d'angle $\pi/5$. Si canviem l'angle de rotació per $3\pi/5$ obtenim la varietat de Seifert-Weber.

Les identifikacions del dodecàedre que ens donen la varietat de Poincaré estan descrites a l'esquema de la figura 13. Observem que les arestes s'identifiquen en grups de tres i que els vèrtexs s'identifiquen en grups de quatre. Per tant, si volem construir una mètrica de curvatura constant utilitzant el dodecàedre, cal construir un dodecàedre regular que tingui arestes amb angle diedre $2\pi/3$ i angles sòlids als vèrtexs $4\pi/4 = \pi$. Aquest dodecàedre té angles superiors als angles del dodecàedre euclidià i existeix a l'espai esfèric, és a dir l'esfera \mathbb{S}^3 amb la mètrica induïda per \mathbb{R}^4 (figura 14). De l'existència d'aquest dodecàedre en deduïm que la varietat de Poincaré admet una mètrica esfèrica (de curvatura constant igual a -1) i, equivalentment, que és homeomorfa a \mathbb{S}^3/Γ , on $\Gamma < \text{Isom}(\mathbb{S}^3) \cong O(4)$ és un grup finit d'isometries que actua lliurement. En aquest cas Γ és un grup de 120 elements.

Ara descrivim l'estructura geomètrica de la varietat de Seifert-Weber. Les identifikacions del dodecàedre que ens donen aquesta varietat estan descrites a l'esquema

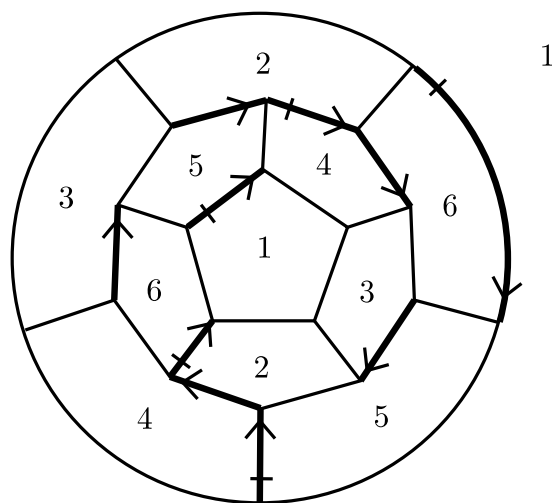


FIGURA 15: Aquest és l'esquema d'identificacions del dodecàedre per a la varietat de Seifert-Weber, i és molt semblant al de la figura 13. En aquest cas, només necessitem descriure dues classes d'equivalència d'arestes per a determinar les identifications (les altres quatre classes s'obtenen per rotació de l'esquema).

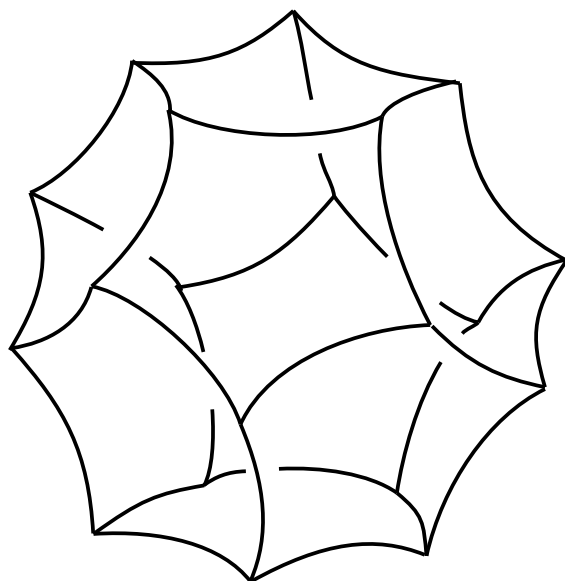


FIGURA 16: Representació conforme d'un dodecàedre hiperbòlic d'angles diedres $2\pi/5$. Podem pensar que desinflen el dodecàedre euclidià per obtenir-lo.

de la figura 15. Observem que les arestes s'identifiquen en grups de cinc i que els vint vèrtexs s'identifiquen en un sol grup. Per tant, busquem un dodecàedre regular que tingui arestes amb angle diedre $2\pi/5$ i angles sòlids als vèrtexs $4\pi/20 = \pi/5$. Aquest dodecàedre té els angles inferiors als angles del dodecàedre euclidià i existeix a l'espai hiperbòlic (figura 16).

Recordem que l'espai hiperbòlic és la bola

$$\mathbb{H}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1\}$$

amb la mètrica

$$ds^2 = \frac{4(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)}{(1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2)^2}.$$

És a dir, és una versió tridimensional del pla hiperbòlic descrit a la secció anterior.

L'existència d'un dodecàedre regular a l'espai hiperbòlic amb aquests angles permet construir una mètrica hiperbòlica sobre la varietat de Seifert-Weber. Una mètrica hiperbòlica és una mètrica de curvatura constant -1 , o equivalentment una mètrica localment isomètrica a \mathbb{H}^3 . Una altra manera de dir-ho és que la varietat de Seifert-Weber és homeomorfa a \mathbb{H}^3/Γ , on $\Gamma < \text{Isom}(\mathbb{H}^3)$ és un grup discret d'isometries infinit que actua lliurement.

4 La conjectura de geometrització

Hem vist que tota superfície compacta, orientable i sense vora té una mètrica de curvatura constant. En dimensió tres això no és cert, perquè abans cal descompondre la varietat. Hi ha una manera canònica de descompondre una varietat de dimensió tres compacta, orientable i sense vora, que explicarem a continuació. La conjectura de geometrització afirma el següent:

CONJECTURA (Thurston) [20]. Tota varietat de dimensió tres, compacta i sense vora es descompon de manera canònica en fragments que són hiperbòlics o fibrats de Seifert.

Comencem per descriure la descomposició, que consta de dues etapes. La primera és la descomposició en suma connexa. L'expressió $M_1 \# M_2$ denota la suma connexa de dues varietats M_1 i M_2 , és a dir $M_1 \# M_2$ s'obté traient una bola de cada M_i i enganxant-ne el resultat. La primera etapa de la descomposició és donada pel següent teorema:

1 TEOREMA (Kneser i Milnor). *Tota varietat M^3 compacta, connexa i orientable de dimensió tres pot escriure's de la manera:*

$$M^3 = M_1^3 \# M_2^3 \# \dots \# M_k^3$$

tal que cada M_i^3 és primera (i. e. no admet cap descomposició en suma connexa no trivial). A més, els factors $M_1^3, M_2^3, \dots, M_k^3$ són únics llevat de permutació.

Kneser provà l'existència de la descomposició el 1929 [7], i Milnor, la unicitat dels factors el 1962 [11].

La segona etapa consisteix a tallar la varietat a través de tors $T^2 \subset M^3$.

2 TEOREMA (Jaco-Shalen i Johannson, 1979) [5, 6]. *Tota varietat M^3 primera de dimensió tres té una família canònica de tors $T^2 \subset M^3$ que descomponen M^3 en trossos que són o bé fibrats de Seifert o bé atoroidals.*

Una varietat M^3 es diu *atoroïdal* si els únics subgrups isomorfs a $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ de $\pi_1(M^3)$ venen de la vora de M^3 (és a dir T^2 és un component de la vora de M^3 i $\pi_1(T^2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} < \pi_1(M^3)$).

La família de tors del teorema de Jaco-Shalen i Johannson és canònica perquè és minimal satisfent certes hipòtesis. Aquesta família pot ser buida, per exemple si $\pi_1(M^3)$ és finit.

Un cop descrita la descomposició, recordem la definició dels altres termes que apareixen en l'enunciat de la conjectura.

3 DEFINICIÓ *Sigui M^3 una varietat de dimensió tres, compacta i que té vora buida o bé una unió de tors T^2 . Diem que M^3 és hiperbòlica si el seu interior admet una mètrica completa de curvatura constant $K \cong -1$. Equivalentment, M^3 és hiperbòlica si*

$$\text{int}(M^3) = M^3 - \partial M^3 \cong \mathbb{H}^3/\Gamma,$$

on $\Gamma < \text{Isom}(\mathbb{H}^3)$ és un grup discret d'isometries de l'espai hiperbòlic sense punts fixos i de covolum finit.

4 DEFINICIÓ *Sigui M^3 una varietat de dimensió tres, compacta i que té vora buida o bé una unió de tors T^2 . Una fibració de Seifert de M^3 és una partició en cercles de la varietat que localment s'escriu de la manera següent. Considerem un cilindre $D^2 \times [0, 1]$ fibrat de manera trivial, amb fibres $\{*\} \times [0, 1]$. El model local és el resultat d'identificar les tapes d'aquest cilindre mitjançant una rotació d'angle $2\pi p/q$, amb $p/q \in \mathbb{Q}$, tal com indica la figura 17.*

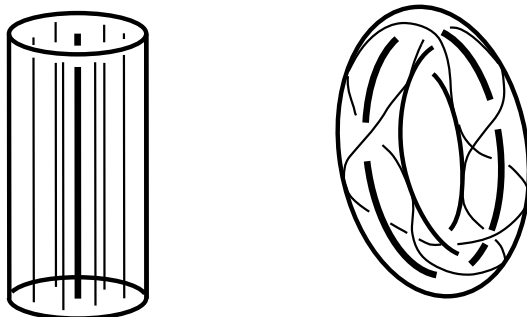


FIGURA 17: Si identifiquem les tapes del cilindre de l'esquerra mitjançant una rotació d'angle $2\pi p/q$, amb $p/q \in \mathbb{Q}$, obtenim el tor de la dreta. Les fibres verticals a l'esquerra indueixen una fibració a la dreta. Si $p/q \notin \mathbb{Z}$, aleshores la fibració té una singularitat en l'ànima del tor. Al dibuix de la dreta hi ha representada l'ànima del tor (o fibra singular) amb traç gruixut i una fibra regular amb traç prim.

Les varietats de Seifert foren classificades pel mateix H. Seifert [16] als anys trenta, mitjançant l'espai de fibres (que és una superfície) i un conjunt finit d'invariants numèrics associats a la fibració (nombre de fibres singulars, monodromia de les singularitats i classe d'Euler).

OBSERVACIONS:

- i) Una varietat de dimensió tres M^3 no pot ser una varietat fibrada de Seifert i hiperbòlica alhora. La justificació d'aquest fet es pot donar utilitzant el grup fonamental $\pi_1(M^3)$. Si M^3 és fibrada de Seifert, aleshores o bé $\pi_1(M^3)$ és finit, o bé $\pi_1(M^3)$ té un centre no trivial (i. e. un element no trivial que commuta amb tot el grup) representat per la fibra. En canvi, si M^3 és hiperbòlica, aleshores $\pi_1(M^3)$ és infinit i no té centre.
- ii) A tota varietat fibrada de Seifert se li pot associar una mètrica de Riemann de manera canònica. S'associen dos tipus de mètriques: mètriques producte (localment isomètriques a \mathbb{R}^3 , $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ o $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$) i mètriques homogènies de contacte (localment isomètriques a les mètriques invariants per l'esquerra dels grups de Lie S^3 , $PSL_2(\mathbb{R})$ i el grup de Heisenberg). Aquestes mètriques inclouen les de curvatura constant positiva o nul·la. També hi ha un recíproc: si M^3 té una mètrica d'aquest tipus aleshores M^3 admet una fibració de Seifert. El lector interessat pot consultar [17] o [19] per detalls.

5 Conseqüències que tindria la conjectura de geometrització

Per tenir una idea de la profunditat o de la dificultat de la conjectura de geometrització donem dues conseqüències que tindria en cas que fos certa:

- 1) Tindríem una resposta afirmativa a la *pregunta de Poincaré* [15], que popularment es coneix com a *conjectura de Poincaré*:

PREGUNTA DE POINCARÉ (1904). Sigui M^3 una varietat de dimensió tres, compacta i sense vora. Si el seu grup fonamental és trivial, aleshores $M^3 \cong S^3$?

- 2) El problema de classificació de les varietats compactes de dimensió tres es reduiria a classificar les varietats hiperbòliques.

Respecte al problema de classificació de les varietats hiperbòliques, cal citar el teorema de rigidesa de Mostow, que ens diu que podem utilitzar la geometria per buscar una classificació topològica. Una de les maneres d'enunciar-lo és la següent:

5 TEOREMA (Mostow, 1967) [12]. *Siguin M_1^3 i M_2^3 dues varietats de dimensió tres, hiperbòliques i de volum finit. Tot isomorfisme*

$$\varphi : \pi_1(M_1^3) \rightarrow \pi_1(M_2^3)$$

es pot realitzar per una isometria $\Phi : M_1^3 \rightarrow M_2^3$.

6 COROLLARI *Sigui M^3 una varietat hiperbòlica de dimensió tres i de volum finit. Aleshores,*

- i) *El grup fonamental determina la varietat M^3 llevat isometria (en particular llevat homeomorfisme).*
- ii) *La mètrica hiperbòlica de M^3 és única. Per tant els invariants geomètrics de M^3 són invariants topològics (fins i tot són invariants homotòpics de M^3 i algebraics de $\pi_1(M^3)$).*

El teorema de Mostow ens diu, doncs, que el grup fonamental és un invariant complet de les varietats hiperbòliques de dimensió tres, però no és gens fàcil decidir si dos grups fonamentals de varietats hiperbòliques són isomorfs. Ens agradaria utilitzar algun invariant geomètric fàcil d'interpretar o que ens sigui familiar, però no en coneixem cap de complet. Mirem-nos, per exemple, el volum:

7 TEOREMA (Jørgensen-Thurston) [20]. *El conjunt de volums de varietats hiperbòliques de dimensió tres és un subconjunt ben ordenat de \mathbb{R} , tancat i no discret. El seu tipus d'ordinal és ω^ω .*

L'ordinal ω^ω vol dir que hi ha un volum mínim v_1 , seguit d'un segon volum v_2 , seguit d'un tercer volum v_3 , etc., que formen una successió que s'acumula en un volum v_ω . Després hi ha un volum següent $v_{\omega+1}$, seguit de $v_{\omega+2}$, etc., fins a un segon punt d'acumulació $v_{2\omega}$. Els punts d'acumulació formen una successió $\{v_\omega, v_{2\omega}, v_{3\omega}, \dots\}$ que tendeix a v_{ω^2} , la successió $\{v_{\omega^2}, v_{2\omega^2}, v_{3\omega^2}, \dots\}$ tendeix a v_{ω^3} , i així successivament.

Tot i que el conjunt de volums pugui descriure's d'aquesta manera, cal tenir en compte que:

- No se sap quin és el volum mínim v_1 .
- Donat un volum, hi ha un nombre finit de varietats hiperbòliques que tenen aquest volum. Tot i ser finit, aquest nombre pot ser arbitràriament gran.

6 Què se sap i què falta per demostrar de la conjectura

Comencem dient què se sap provar de la conjectura de geometrització.

8 TEOREMA *Si M^3 és una varietat de Haken, aleshores M^3 satisfà la conjectura de geometrització.*

Aquest teorema fou provat per Thurston el 1977 i la demostració fou completada i millorada per McMullen el 1995 [8, 9] i Otal el 1996 [13, 14]. Diem que M^3 és una varietat de Haken si és una varietat compacta i primera que conté una superfície F_g^2 de gènere $g \geq 1$ tal que el morfisme induït

$$\pi_1(F_g^2) \rightarrow \pi_1(M^3)$$

és injectiu. Per exemple, tota varietat primera amb vora és una varietat de Haken. Si la descomposició de Jaco-Shalen i Johansson d'una varietat primera no és trivial, aleshores és una varietat de Haken.

9 TEOREMA *Si M^3 és una varietat primera, $\pi_1(M^3)$ és infinit i el centre de $\pi_1(M^3)$ no és trivial, aleshores M^3 és una varietat de Seifert; en particular satisfà la conjectura de geometrització.*

Aquest teorema és el fruit del treball de diversos autors: Scott (1983) [18], Mess (1988) [10], Gabai (1992) [3] i Casson-Jungreis (1994) [2]. La demostració consisteix a provar que el centre Z de $\pi_1(M^3)$ és isomorf a \mathbb{Z} i que $\pi_1(M^3)/Z$ és isomorf a l'espai de fibres d'una fibració de Seifert. A partir d'això es construeix una fibració de Seifert de M^3 .

10 TEOREMA Si M^3 és primera i existeix un difeomorfisme $\phi : M^3 \rightarrow M^3$ no trivial d'ordre finit ($\phi \neq \text{Id}$, $\phi^n = \text{Id}$), que preserva l'orientació i que té punts fixos, aleshores M^3 satisfà la conjectura de geometrització.

Aquest teorema fou enunciat per Thurston el 1982 [20], que en donà les principals idees per a la demostració, i la demostració completa ha estat anunciada per Cooper-Hodgson-Kerckhoff i Boileau-Porti [1] el 1998. La idea de Thurston consisteix a estudiar mètriques singulars en el quocient $M^3/\langle\phi\rangle$.

Fins aquí hem citat resultats de gent considerada com a topòlegs, però també hi ha resultats des de la geometria diferencial. En la meua opinió, un dels més interessants és el següent:

11 TEOREMA (Hamilton, 1986) [4]. *Sigui M^3 una varietat de dimensió tres, compacta i sense vora. Si M^3 admet una mètrica de curvatura de Ricci positiva o nul·la, aleshores*

- *o bé M^3 admet una mètrica de curvatura seccional constant positiva o nul·la,*
- *o bé M^3 admet una mètrica localment isomètrica al producte $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$.*

En particular M^3 és una varietat fibrada de Seifert, i per tant satisfà la conjectura de geometrització.

I finalment, *què queda per provar de la conjectura de geometrització?* El que queda per provar es pot dividir en dues conjectures força diferenciades, segons si el grup fonamental és finit o infinit, que anomenarem *conjectura A* i *conjectura B*.

CONJECTURA A (grup fonamental infinit): *Sigui M^3 una varietat de dimensió tres, primera, compacta i sense vora. Suposem que $\pi_1(M^3)$ és infinit, que no conté cap subgrup isomorf a $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ i que no té centre, aleshores M^3 és hiperbòlica.*

CONJECTURA B (grup fonamental finit): *Sigui M^3 una varietat de dimensió tres, primera, compacta i sense vora. Si $\pi_1(M^3)$ és finit, aleshores M^3 és fibrada de Seifert.*

La conjectura B equival a demostrar que M^3 admet una mètrica de curvatura constant $K \cong +1$. Aquesta conjectura també la podem dividir en dues conjectures B1 i B2. En particular, la conjectura B1 pretén que la pregunta de Poincaré té una resposta afirmativa.

CONJECTURA B1 (resposta afirmativa a la pregunta de Poincaré): *Sigui M^3 una varietat de dimensió tres, compacta i sense vora. Si $\pi_1(M^3)$ és finit, aleshores M^3 és homeomorfa a S^3 .*

CONJECTURA B2 (linearització de les accions sobre S^3): *Les accions finites i llises sobre S^3 són conjugades a accions ortogonals (que preserven la mètrica canònica).*

Com en molts d'altres casos, aquestes conjectures tenen partidaris i detractors. En el que sí que estem d'acord els topòlegs, és que el repte de demostrar-les o de trobar-ne contraexemples és fascinant.

Referències

- [1] BOILEAU, M., PORTI, J. *Geometrization of 3-orbifolds of cyclic type*. Preprint 1998.
- [2] CASSON, A., JUNGREIS, D. «Convergence Groups and Seifert-fibered 3-manifolds», *Invent. Math.*, 118 (1994), 441–456.

- [3] GABAI, D. «Convergence groups are Fuchsian groups», *Ann. of Math.*, 136 (1992), 447–510.
- [4] HAMILTON, R. S. «Four-manifolds with positive curvature operator», *J. Diff. Geom.*, 24 (1986), 153–179.
- [5] JACO, W., SHALEN, P. *Seifert fibered spaces in 3-manifolds*. Memoirs of the Amer. Math. Soc., vol. 220, 1979.
- [6] JOHANNSON, K. *Homotopy-equivalences of 3-manifolds with boundary*. Lecture Notes in Math., vol. 761, Springer-Verlag, 1979.
- [7] KNESER, H. «Geschlossene Flächen in dreidimensionale Mannigfaltigkeiten», *Jahresber. Deutsch. Math.-Verein.*, 38 (1929), 248–260.
- [8] MCMULLEN, C. «Iterations on Teichmüller space», *Invent. Math.*, 99 (1989), 425–454.
- [9] MCMULLEN, C. *Renormalization and 3-manifolds which fiber over the circle*. Annals of Math. Studies, vol. 144, Princeton University Press, 1996.
- [10] MESS, G. *The Seifert fibered space conjecture and groups which are coarse quasi-isometric to planes*. Preprint 1988.
- [11] MILNOR, J. «A unique factorisation theorem for 3-manifolds», *Amer. J. Math.* 84 (1962), 1–7.
- [12] MOSTOW, G. D. «Quasi-conformal mappings in n-space and the rigidity of hyperbolic space forms», *I. H. E. S. Publ. Math.*, 9 (1961), 5–22.
- [13] OTAL, J.-P. *Le théorème d'hyperbolization de Thurston pour les variétés fibreées de dimension 3*. Astérisque, vol. 235, Soc. Math. de France, 1996.
- [14] OTAL, J.-P. *Thurston's hyperbolization of Haken manifolds*. Preprint 1997.
- [15] POINCARÉ, H. «Cinquième complément à l'analysis situs», *Rend. Circ. Math. Palermo*, 18 (1904), 45–110.
- [16] SEIFERT, H. «Topology of 3-dimensional fibered spaces», en *A Textbook of topology*, Academic Press, 1980.
- [17] SCOTT, P. «The geometry of 3-manifolds», *Bull. of the London Math. Soc.*, 15 (1983), 401–487.
- [18] SCOTT, P. «There are no fake Seifert fibered spaces with infinite π_1 », *Ann. of Math.*, 102 (1983), 35–70.
- [19] THURSTON, W. *Three-Dimensional Geometry and Topology, I*. Princeton Mathematical Series, vol. 35, Princeton University Press, 1997.
- [20] THURSTON, W. «Three dimensional Manifolds, Klenian groups and hyperbolic geometry», *Bull. of the Amer. Math. Soc.*, 16 (1982), 357–381.
- [21] WEBER, C., SEIFERT, H. «Die beiden Dodekaederraume», *Math. Z.*, 37 (1993).